ISEG/UL — ESTATÍSTICA I — 2.º Ano/GES FIN – 1.º Semestre 2020/21

Exame EN — 05 de Janeiro de 2021 — Duração: 2 horas

Nome: Tópicos de Resolução **Número:**

Atenção: Nas perguntas de escolha múltipla, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta errada vale -0.25 valores. A ausência de resposta vale 0 valores. Nas outras perguntas, justificar detalhadamente as respostas.

Cotação:

Pergunta	1	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	8a	8b
Cotação Total	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Cotação Atribuida														

1. Sejam A, B, C e D acontecimentos de um espaço de resultados Ω. Assuma que o conjunto dos acontecimentos $\{A, B, C\}$ forma uma partição de Ω e A é independente de D. Prove, mostrando todos os passos necessários, que

$$P(D \cap (B \cup C)) = P(D)(P(B) + P(C))$$

RESPOSTA 1.

Tendo em conta que A, B e C formam uma partição temos que $B \cup C = \bar{A}$, logo queremos provar que

$$P(D \cap \bar{A}) = P(D)(P(B) + P(C))$$

$$P(D \cap \bar{A}) = P(D) - P(D \cap A) = P(D) - \underbrace{P(D) \times P(A)}_{\text{pois } D \text{ e } A \text{ são acontecimentos independentes}}$$

$$= P(D)(1 - P(A))$$

$$= P(D)P(\bar{A}) = P(D) \times (P(B \cup C))$$

$$= P(D) \times (P(B) + P(C))$$

Como queríamos demonstrar.

VSFF

2. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias exponenciais com média $\frac{1}{\lambda}$. Assumindo que X_1 e X_2 são independentes, calcule a função distribuição da variável aleatória $Y = \max(X_1, X_2)$.

RESPOSTA 2.

$X_i \sim Exp(\lambda)$, pois $E(X_i) = 1/\lambda$, $i = 1, 2$

com X_1 independente de X_2.

sendo $Y = \max(X_1, X_2)$ temos que

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max(X_1, X_2) \leq y)$$

$$= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y)$$

$$= P(X_1 \leq y)\, P(X_2 \leq y) \quad \text{(pois } X_1 \text{ e } X_2 \text{ são independentes)}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ (1 - e^{-\lambda y})^2, & y \geq 0 \end{cases}$$

3. Uma conferência que se realizará nos próximos dias juntará dirigentes políticos de vários pontos do país para discutir o estado da pandemia em Portugal. Sabe-se que 40% dos participantes pertencem às regiões metropolitanas de Lisboa e Porto (região 1), 15% às regiões autónomas dos Açores e da Madeira (região 2), e os restantes 45% ao resto do país (região 3). Falarão nesta conferência 20% dos participantes. Da região 1 falarão 20% dos participantes e da região 3 falarão 25% dos participantes.

a) Escolhendo ao acaso 10 participantes da conferência, a probabilidade de que 6 deles pertençam à Região 3 é

☒ **i)** 0.1596 ☐ **ii)** 0.2384
☐ **iii)** 0.5044 ☐ **iv)** 0.8980

b) Calcule a probabilidade de que um participante das regiões autonomas fale na conferência.

RESPOSTA 3.b)

R_i : O participante pertence à Região i, com $i = 1, 2, 3$

F : O participante fala na conferência

$P(R_1) = 0.4$ $P(R_2) = 0.15$ $P(R_3) = 0.45$

$P(F) = 0.2$ $P(F \mid R_1) = 0.2$

$P(F \mid R_3) = 0.25$

Queremos calcular $P(F \mid R_2)$

$$P(F) = P(F \mid R_1)P(R_1) + P(F \mid R_2)P(R_2) + P(F \mid R_3)P(R_3)$$

$$\Leftrightarrow 0.2 = 0.2 \times 0.4 + P(F \mid R_2) \times 0.15 + 0.25 \times 0.45$$

VSFF

$$\Leftrightarrow P(F \mid R_2) = 0.05$$

4. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} a, & x \in]0,1[\\ b, & x \in]2,3[\\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Qual é o valor dos parâmetros a e b tais que $E(X) = 2$?

☐ **i)** $a = 1/2$ e $b = 1/2$ ☐ **ii)** $a = 1/3$ e $b = 2/3$

☒ **iii)** $a = 1/4$ e $b = 3/4$ ☐ **iv)** $a = 3/4$ e $b = 1/4$

b) Calcule o valor esperado de X^2 em função de a e b.

RESPOSTA 4.b)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 a x^2\, dx + \int_2^3 b x^2\, dx$$

$$= a \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + b \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{a}{3} + \frac{19}{3} b$$

VSFF

5. Numa fábrica existem duas linhas de montagem para a produção de determinado tipo de peças. Na linha A a peça é montada enquanto na linha B são feitos os afinamentos a cada peça que vem da linha A. Naturalmente, as peças só passam para a linha B depois de terminada a sua montagem na linha A. Sejam X_A e X_B as variáveis aleatórias que representam o número de peças que são finalizados respectivamente nas linhas de montagem A e B durante uma hora. A função de probabilidade conjunta de (X_A, X_B) é dada por

$$f_{X_A,X_B}(x_a, x_b) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x_a = 0,1,2,3;\ x_b = 0,1,2,3;\ x_b \leq x_a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Qual a probabilidade de serem montadas pelo menos duas peças na linha B?

☐ **i)** 1/5 ☒ **ii)** 3/10 ☐ **iii)** 2/5 ☐ **iv)** 7/10

b) Numa hora em que sejam montadas 2 peças na linha A, qual a média e a variância do número de peças montado na linha B?

RESPOSTA 5.b)

$$E(X_B \mid X_A = 2) = \sum_{x_b} x_b \cdot f_{X_B|X_A=2}(x_b)$$

$$f_{X_B|X_A=2}(x_b) = \frac{f_{X_A,X_B}(2, x_b)}{f_{X_A}(2)} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x_b = 0,1,2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_{X_A}(2) = P(X_A = 2, X_B = 0) + P(X_A = 2, X_B = 1) + P(X_A = 2, X_B = 2) = \frac{3}{10}$$

$$E(X_B \mid X_A = 2) = \frac{1}{3} \times (0 + 1 + 2) = 1$$

$$E(X_B^2 \mid X_A = 2) = \sum_{x_b=0}^{2} \frac{1}{3} \times x_b^2 = 5/3$$

$$Var(X_B \mid X_A = 2) = E(X_B^2 \mid X_A = 2) - (E(X_B \mid X_A = 2))^2$$

$$= 5/3 - 1 = 2/3$$

VSFF

6. O número de barcos que chegam ao Terreiro do Paço, em Lisboa, desde a abertura da estação portuária segue um processo de Poisson. Sabe-se que por cada hora chegam em média 10 barcos.

a) O tempo, em horas, desde a abertura da estação portuária até à chegada do primeiro barco segue uma distribuição

☐ **i)** $Exp(5)$ ☐ **ii)** $Gama(2, 10)$
☐ **iii)** $Gama(2, 1/10)$ ☒ **iv)** $Exp(10)$

b) Qual a probabilidade de, em 30 minutos, chegarem, no máximo, 2 barcos ao Terreiro do Paço?

RESPOSTA 6.b)

X_t : v.a. que representa o número de barcos que chegam ao terreiro do Paço desde a abertura da estação Portuária

$X_t \sim Poi(\lambda t)$ $\quad E(X_1) = 10 \Rightarrow \lambda = 10$

$$P(X_{0.5} \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} P(X_{0.5} = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = 0.1247$$

pois $X_{0.5} \sim Poi(5)$

7. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Qual das seguintes opções representa $P(X > 1/2, Y < 1/2)$?

☐ **i)** 1/4 ☒ **ii)** 3/8 ☐ **iii)** 5/8 ☐ **iv)** 1/2

b) Mostre que função densidade marginal de X é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Considerando uma sequência de variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_{30}$ que são independentes e identicamente distribuídas a X, calcule $P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i > 20\right)$.

RESPOSTA 7.b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^1 2x\, dy, & 0<x<1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$X_1, X_2, \dots, X_{30}$ são v.a. i.i.d. a X

$$E\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30\, E(X) = 30 \int_0^1 2x^2\, dx = 30 \times \frac{2}{3} = 20$$

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30\, \text{Var}(X) = 30\left(E(X^2) - (E(X))^2\right)$$

$$= 30\left(1/2 - 4/9\right)$$

$$= 5/3$$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{30} X_i \overset{a}{\sim} N(20, 5/3)$$

(pelo TLC)

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i > 20\right) \approx 1 - \Phi(0) = 0.5$$

VSFF

8. Sejam três variáveis aleatórias independentes: $X \sim N(0,4)$; $Y \sim \chi^2(12)$; $Z \sim \chi^2(10)$.

a) Qual o valor aproximado de a, tal que $P(X \leq a) = 0.7$?

☐ **i)** 0.524 ☐ **ii)** 2.096 ☒ **iii)** 1.048 ☐ **iv)** −0.524

b) Encontre o valor de b, tal que $P(Z > bY) = 0.9$.

RESPOSTA 8.b)

b: $0.9 = P(Z > bY) = P\left(\frac{Z}{Y} > b\right) = P\left(\frac{Y}{Z} < \frac{1}{b}\right)$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{Y}{Z} \geq 1/b\right) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y/12}{Z/10} \geq \frac{10}{12} \times \frac{1}{b}\right)$

Uma vez que $Y \sim \chi^2_{(12)}$ e $Z \sim \chi^2_{(10)}$ temos que

$\frac{Y/12}{Z/10} \sim F_{(12,10)}$, logo recorrendo às tabelas

$P\left(\frac{Y/12}{Z/10} \geq \frac{10}{12} \times \frac{1}{b}\right) = 0.1 \Leftrightarrow \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{b} = 2.28$

$\Leftrightarrow b = 0.3655$

FIM